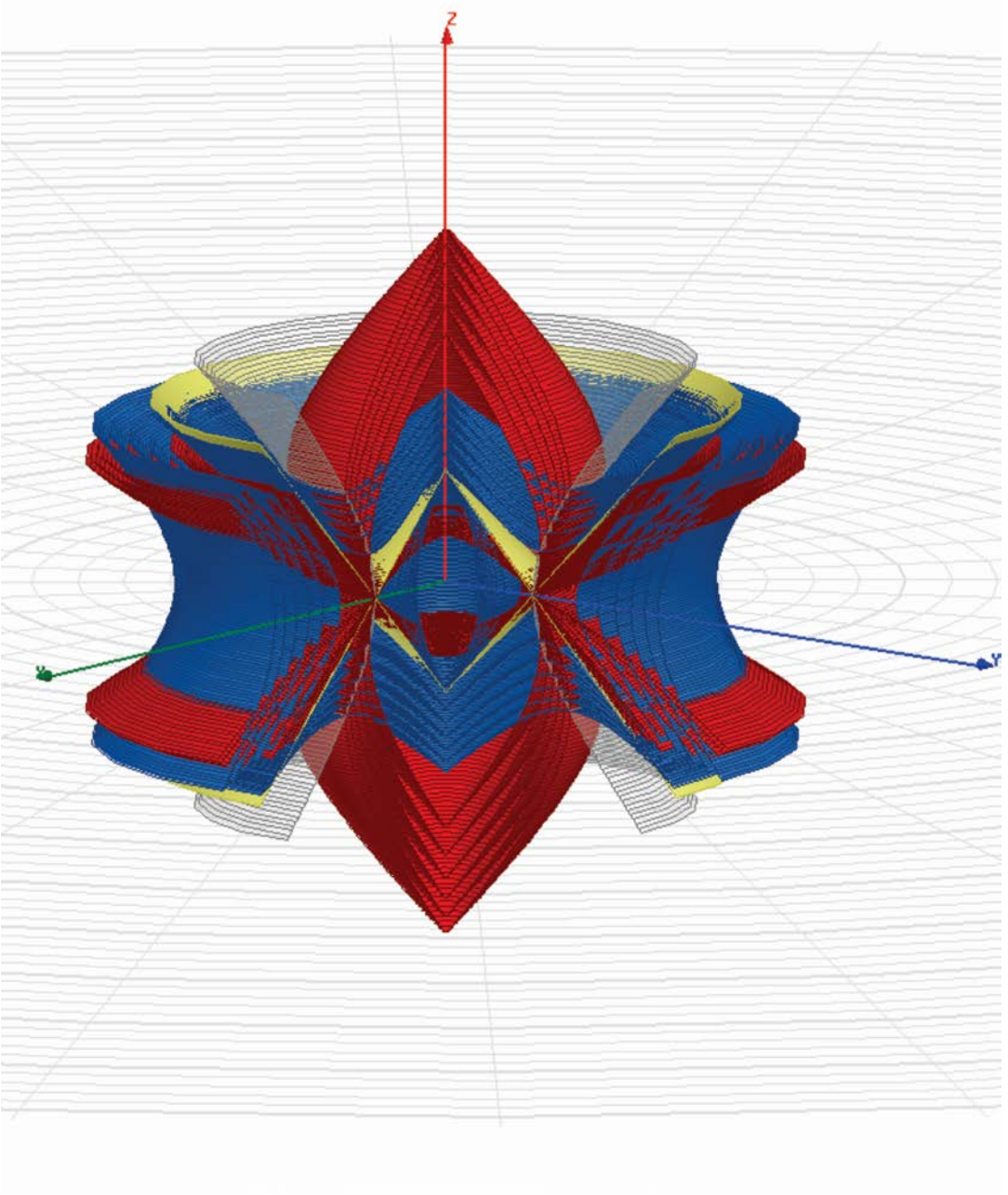


$\mathbb{R}_1^3$ Lorentz-Minkowski Uzayında

LORENTZ VE HİPERBOLİK KOORDİNAT SİSTEMLERİ

Prof. Dr. Hasan Hüseyin UĞURLU - Prof. Dr. Osman GÜRDAL



Gözden Geçirilmiş 2. Basım

Ocak 2023

Manisa Celal Bayar Üniversitesi Yönetim Kurulu'nun 30.01.2023 tarihli ve 2023/02 sayılı toplantısında alınan XXXI numaralı kararı ile basılmıştır.

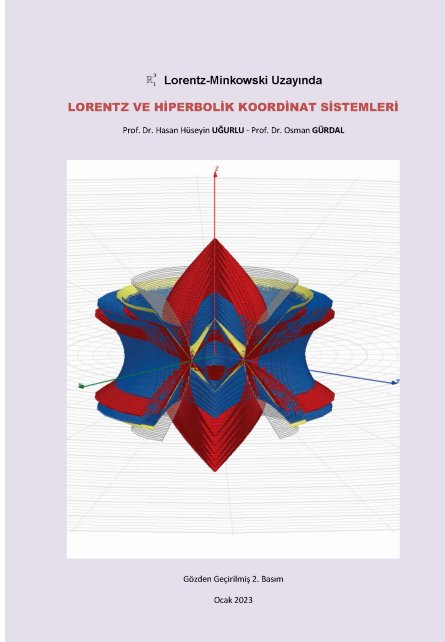
$\mathbb{R}_1^3$

Lorentz-Minkowski Uzayında

LORENTZ VE HİPERBOLİK KOORDİNAT SİSTEMLERİ

Editör : Prof. Dr. Hasan Hüseyin UĞURLU

Prof. Dr. Osman GÜRDAL



**Gözden Geçirilmiş
2. Basım**

MCBÜ Rektörlük Basımevi – 0 236 201 11 15

Baskı-Cilt : MCBÜ Rektörlük Basımevi Müdürlüğü - MANİSA

ISBN: 978-975-8628-92-6

Bu kitabın Türkçe yayın hakları kitabın hukuki yayımcısına ait olup her hakkı saklıdır. Hiçbir bölümü ve paragrafı kısmen veya tamamen ya da özet halinde, fotokopi, faksimile veya başka herhangi bir biçimde çoğaltılamaz, dağıtılamaz yeniden elde edilmek üzere saklanamaz. Normal ölçüyü aşan iktibaslar yapılamaz ancak normal ve kanuni iktibaslarda kaynak gösterilmesi zorunludur.

ÖNSÖZ

Koordinat sistemleri, sadece matematikte değil, diğer bilim dallarındaki araştırmalarda da sıklıkla müracaat edilen önemli geometrik yapılardır. Temel fen bilimleri ve mühendislik başta olmak üzere bütün bilim dallarındaki araştırmalarda karşılaşılan problemler, genellikle, bir koordinat sistemi yardımıyla çözülür. Eğer bir problem, bilinen koordinat sistemleriyle çözilemiyorsa, sayısal çözümlerin dışındaki seçeneklerden birisi, problemin sınır şartlarına uygun yeni bir koordinat sistemi tanımlamaktır. Bizi böyle bir kitap hazırlamaya sevkeden düşünce, E^3 Öklid uzayında iyi bilinen ve alan teorisi başta olmak üzere, bütün bilim dallarında uygulamaları bulunan bazı koordinat sistemlerinin, $(+,+,-)$ işaretli $\mathbb{R}_1^3$ Lorentz-Minkowski uzayındaki karşılıklarının literatürde tanımlı olmamasıdır.

Bu kitap, $\mathbb{R}_1^3$ uzayında yeni tanımlanan Lorentz ve hiperbolik ortogonal koordinat sistemlerini kapsar. Bu koordinat sistemleri doğrudan metrik dönüşüm ile Öklid koordinat sistemleri dikkate alınarak tanımlanmıştır.

Uzaylarda uygulama alanı en geniş olan koordinat sistemleri küresel olanlardır. E^3 Öklid uzayında r -yarıçaplı küreler ailesinin dik yörüngeleri O merkezli koniler iken; $\mathbb{R}_1^3$ uzayındaki r -yarıçaplı Lorentz ve hiperbolik küre ailelerinin dik yörüngeleri, sırasıyla, O merkezli uzaysı ve zamansı koni aileleridir. Bu ifade, ışık konisinin kendine dik olduğunu ifade eder. Eu-SpCS'ler Öklid açı yardımıyla tanımlanırken; Lo-SpCS ve Hy-SpCS'ler θ_L merkez ve θ_H hiperbolik açıları yardımıyla tanımlanır. Eu-SpCS'ne bağlı olarak tanımlanan ve Öklid uzayındaki uygulamaları oldukça geniş olan koordinat sistemleri Eu-OSCS, Eu-PSCS, Eu-ToCS, Eu-BsCS ve Eu-TSCS'dir. Bu koordinat sistemlerinin her biri için iki çeşit olmak üzere, $\mathbb{R}_1^3$ uzayında toplam 10 ortogonal koordinat sistemi tanımlanır. Bunlar, kısaltılmış olarak Lo-OSCS, Hy-OSCS; Lo-PSCS, Hy-PSCS; Lo-ToCS, Hy-ToCS; Lo-BsCS, Hy-BsCS; Lo-TSCS, Hy-TSCS notasyonları ile gösterilir. Lo-SpCS ve Hy-SpCS'lerin dik yörünge ailelerinin değişkenleri θ_L ve θ_H açıları arasındaki geçişler, koordinat sistemlerinin anlaşılmasında son derece önemlidir. Bu ilişkiler, grafiksel destekli yaklaşım (karesel çıkarma) ile elde edilmiş ve ilgili bölümlerde açıklanmıştır. Aynı yaklaşım, (karesel yansıtma ve öteleme ile) diğer Lorentz ve hiperbolik koordinat sistemi ikililerine uygulanmıştır.

Kitabın birinci bölümünde, Öklid ve Lorentz bakış açısından, bir ortogonal koordinat sistemindeki bir eğri ailesinin ortogonal yörüngesinin nasıl oluştuğu SpCS baz alınarak açıklanmıştır. Öklid, Lorentz ve hiperbolik durumlarda, buradaki eşitliklerin nasıl değiştiği çizelgelerde gösterilmiştir.

$\mathbb{R}_1^3$ uzayının yapısı ve temel kavramları ikinci bölümde, Lorentz metriğindeki katsayıların belirlenmesi ve vektörlerin dönüşümü üçüncü bölümde, Lo-SpCS ve Hy-SpCS ile tanımlar, teoremler, diferansiyel denklemler ve çözümleri dördüncü bölümde verilmiştir.

Lorentz metriği pozitif tanımlı olmadığından, $\mathbb{R}_1^3$ uzayındaki silindirler de üç sınıfa ayrılır. Beşinci bölüm; bu silindirlerin oluşturduğu Lo-CyCS, Hy-CyCS ve 1 indeksli CyCS ile ilgili tanımlar teoremlerin ispatlarını, diferansiyel elemanları ve bütün eşitlikleri kapsamaktadır.

Sonraki bölümlerde, E^3 Öklid uzayındaki beş ortogonal koordinat sisteminin, $\mathbb{R}_1^3$ uzayındaki karşılıkları olan on koordinat sistemi tanımlanmıştır. Altıncı bölümde Lo-OSCS ve Hy-OSCS, yedinci bölümde Lo-PSCS ve Hy-PSCS, sekizinci bölümde Lo-ToCS ve Hy-ToCS, dokuzuncu bölümde Lo-BsCS ve Hy-BsCS ve onuncu bölümde Lo-TSCS ve Hy-TSCS detaylıca açıklanmıştır. Bu sistemleri ifade eden ailelerin diferansiyel denklemleri bulunmuş, dik yörünge ailelerinin

diferansiyel denklemi yazılmış ve çözümleri olan dik yörünge aileleri elde edilmiştir. Koordinat yüzeyleri, diferansiyel uzunluk elemanları bulunmuş ve birim vektör ilişkileri matris formunda verilmiştir. Bulunan bütün eşitlikler, her bir koordinat sistemi için bir çizelgede toplanmıştır.

CrCaCS, ρz – Lorentz düzleminde ortogonal iki eğrinin teğetlerini kolaylıkla göstererek, Lorentz özellikleri farketme imkanı vermektedir. Genellikle, karesel özellikteki bu koordinat sistemlerinin grafikleri, kolay çizim sağlayan ve yorumlamaya uygun SRSC üzerinde çizilmiştir. Tanımlanan bütün koordinat sistemleri için SRSC ve CrCaCS kullanılarak, hemen hemen tam renkli görsel yaklaşım benimsenmiştir. Bu koordinat sistemleri, önce ρz – düzleminde ve sonra $\mathbb{R}_1^3$ uzayında grafiklerle zarif bir şekilde görsel hale getirilmiştir.

$\mathbb{R}_1^3$ uzayında tanımlanan Lorentz ve hiperbolik koordinat sistemleri ile Öklid koordinat sistemleri arasındaki farklılıkların kolay görülebilmesi için Öklid uzayındaki koordinatların değişimi ve koordinat sistemleri Ekler Bölümünde verilmiştir.

$\mathbb{R}_1^3$ uzayında çalışan araştırmacılar için son derece önemli olduğunu düşündüğümüz bu ortogonal Lorentz ve hiperbolik koordinat sistemlerinin; sadece matematikçiler için değil, aynı zamanda elektrodinamik, relativite teorisi, astronomi ve diğer bilim dallarında çalışan bilim insanları için de temel kaynak olacağını ve onları yeni çalışmalara yönlendireceğini umuyoruz.

İlk basımının 2015 yılında www.researchgate.com'da paylaşıldığı bu çalışmada; basım aşamasına gelinceye kadar, gerek bilimsel anlamda ve gerekse basımdan kaynaklanan eksikliklerin olmaması için olabildiğince çaba gösterilmiştir. Buna rağmen, gözden kaçan hataların bildirilmesi ve gelecek basım için öneriler şükranla karşılanır.

Prof. Dr. Hasan Hüseyin UĞURLU - Prof. Dr. Osman GÜRDAL, 2023

KISALTMALAR LİSTESİ

LSC	Doğrusal Skalalı Çizge (Linearly Scaled Chart)
SRSC	Karekök Skalalı Çizge (Square Root Scaled Chart)
CrCaCS	Çapraz Kartezyen Koordinat Sistemi (Cross Cartesian Coordinate System)
TTC	Tanjant Kros (The Tangent Cross)
CS	Koordinat Sistemi (Coordinate System)
OCS	Dik Koordinat Sistemi (Orthogonal Coordinate System)
Eu-CS	Öklid Koordinat Sistemi (Euclidean Coordinate System)
Eu-CaCS	Öklid Kartezyen Koordinat Sistemi (Euclidean Cartesian Coordinate System)
Eu-CrCaCS	Öklid Çapraz Kartezyen Koordinat Sistemi (Euclidean Cross Cartesian Coordinate System)
Eu-CyCS	Öklid Silindirik Koordinat Sistemi (Euclidean Cylindrical Coordinate System)
Eu-SpCS	Öklid Küresel Koordinat Sistemi (Euclidean Spherical Coordinate System)
Eu-OSCS	Öklid Basık Küremsi Koordinat Sistemi (Euclidean Oblate Spheroidal Coordinate System)
Eu-PSCS	Öklid Sivri Küremsi Koordinat Sistemi (Euclidean Prolate Spheroidal Coordinate System)
Eu-ToCS	Öklid Toroidal Koordinat Sistemi (Euclidean Toroidal Coordinate System)
Eu-BsCS	Öklid Çiftküresel Koordinat Sistemi (Euclidean Bispherical Coordinate System)
Eu-TSCS	Öklid Tanjant-Küre Koordinat Sistemi (Euclidean Tangent-Sphere Coordinate System)
Lo-CS	Lorentz Koordinat Sistemi (Lorentzian Coordinate System)
Hy-CS	Hiperbolik Koordinat Sistemi (Hyperbolic Coordinate System)
Lo-OCS	Lorentz Ortogonal Koordinat Sistemi (Lorentzian Orthogonal Coordinate System)
Hy-OCS	Hiperbolik Ortogonal Koordinat Sistemi (Hyperbolic Orthogonal Coordinate System)
Lo-CaCS	Lorentz Kartezyen Koordinat Sistemi (Lorentzian Cartesian Coordinate System)
Lo-CyCS	Lorentz Silindirik Koordinat Sistemi (Lorentzian Cylindrical Coordinate System)
Hy-CyCS	Hiperbolik Silindirik Koordinat Sistemi (Hyperbolic Cylindrical Coordinate System)
Lo-SpCS	Lorentz Küresel Koordinat Sistemi (Lorentzian Spherical Coordinate System)
Hy-SpCS	Hiperbolik Küresel Koordinat Sistemi (Hyperbolic Spherical Coordinate System)
Lo-OSCS	Lorentz Basık Küresel Koordinat Sistemi (Lorentzian Oblate Spheroidal Coordinate System)
Hy-OSCS	Hiperbolik Basık Küresel Koordinat Sistemi (Hyperbolic Oblate Spheroidal Coordinate System)
Lo-PSCS	Lorentz Sivri Küresel Koordinat Sistemi (Lorentzian Prolate Spheroidal Coordinate System)
Hy-PSCS	Hiperbolik Sivri Küresel Koordinat Sistemi (Hyperbolic Prolate Spheroidal Coordinate System)
Lo-ToCS	Lorentz Toroidal Koordinat Sistemi (Lorentzian Toroidal Coordinate System)
Hy-ToCS	Hiperbolik Toroidal Koordinat Sistemi (Hyperbolic Toroidal Coordinate System)
Lo-BsCS	Lorentz Çiftküresel Koordinat Sistemi (Lorentzian Bispherical Coordinate System)
Hy-BsCS	Hiperbolik Çiftküresel Koordinat Sistemi (Hyperbolic Bispherical Coordinate System)
Lo-TSCS	Lorentz Tanjant-Küre Koordinat Sistemi (Lorentzian Tangent-Sphere Coordinate System)
Hy-TSCS	Hiperbolik Tanjant-Küre Koordinat Sistemi (Hyperbolic Tangent-Sphere Coordinate System)

NOTASYON

$\langle, \rangle$	Lorentz iç çarpımı (Lorentzian inner product)
E^2	Öklidyen 2 uzayı (Euclidean 2-space)
$\mathbb{R}_1^3$	Lorentz-Minkowski 3 uzayı (Lorentz-Minkowski 3-space)
$ \cdot $	Norm (Norm)
$H_0^2(r)$	r yarıçaplı Hiperbolik küre (Hyperbolic sphere with radius r)
$H_+^2(r)$	r yarıçaplı gelecek Hiperbolik küre (Future Hyperbolic sphere with radius r)
$H_-^2(r)$	r yarıçaplı geçmiş Hiperbolik küre (Past Hyperbolic sphere with radius r)
$S_1^2(r)$	r yarıçaplı Lorentz küresi (Lorentzian sphere with radius r)
C^2	Işıksı koni (Lightlike cone)
C_+^2	Gelecek ışıksı koni (Future Lightlike cone)
$\mathcal{G}_H$	Hiperbolik açı (Hyperbolic angle)
$\mathcal{G}_L$	Merkez açı (Central angle)
$\mathcal{G}_S$	Uzaysı açı (Spacelike angle)
$\mathcal{G}_T$	Zamansı açı (Timelike angle)
θ	Öklidyen açı (Euclidean angle)
ϕ	Öklidyen açı (Euclidean angle)

İÇİNDEKİLER

1 GİRİŞ	1
1.1 Ortogonal Yörüngeler	2
2 LORENTZ-MINKOWSKI $\mathbb{R}_1^3$ UZAYININ TEMEL KAVRAMLARI	11
3 LORENTZ METRİĞİNDE KATSAYILARIN BELİRLENMESİ	19
3.1 Lorentz Metriğinde Katsayıların Belirlenmesi	19
3.2 Vektörlerin Dönüştürülmesi	22
4 LORENTZ VE HİPERBOLİK KÜRESEL KOORDİNAT SİSTEMLERİ	25
4.1 Lorentz Küresel Koordinat Sistemi	25
4.2 Hiperbolik Küresel Koordinat Sistemi	26
5 SİLİNDİRİK KOORDİNAT SİSTEMLERİ	35
5.1 Lorentz Döngüsel Silindirler	35
5.2 Hiperbolik Döngüsel Silindirler	36
5.3 1 İndeksli Döngüsel Silindirler	37
6 LORENTZ VE HİPERBOLİK BASIK KÜREMSİ KOORDİNAT SİSTEMLERİ	43
6.1 Lorentz Basık Küremsi Koordinat Sistemi	43
6.2 Hiperbolik Basık Küremsi Koordinat Sistemi	44
7 LORENTZ VE HİPERBOLİK SİVRİ KÜREMSİ KOORDİNAT SİSTEMLERİ	57
7.1 Lorentz Sivri Küremsi Koordinat Sistemi	57
7.2 Hiperbolik Sivri Küremsi Koordinat Sistemi	58
8 LORENTZ VE HİPERBOLİK TOROİDAL KOORDİNAT SİSTEMLERİ	69
8.1 Lorentz Toroidal Koordinat Sistemi	69
8.2 Hiperbolik Toroidal Koordinat Sistemi	71
9 LORENTZ VE HİPERBOLİK ÇİFT KÜRESEL KOORDİNAT SİSTEMLERİ	85
9.1 Lorentz Çift Küresel Koordinat Sistemi	85
9.2 Hiperbolik Çift Küresel Koordinat Sistemi	85
10 LORENTZ VE HİPERBOLİK TANJANT KÜRE KOORDİNAT SİSTEMLERİ	95
10.1 Lorentz Tanjant Küre Koordinat Sistemi	95
10.2 Hiperbolik Tanjant Küre Koordinat Sistemi	96

11 GENELLEŞTİRME	103
EKLER	105
A.1 ÖKLİD UZAYINDA KOORDİNATLARIN DÖNÜŞÜMÜ	105
A.1.1 Öklid Uzayında Metrik Katsayılar	105
A.1.2 Öklid Uzayında Metrik Katsayıların Belirlenmesi	105
A.1.3 Öklid Uzayında Vektörlerin Dönüşümü	107
A.2 ÖKLİDYEN KOORDİNAT SİSTEMLERİ	108
A.2.1 Öklidyen Küresel Koordinat Sistemi	114
A.2.2 Öklidyen Basık Küremsi Koordinat Sistemi	117
A.2.3 Öklidyen Sivri Küremsi Koordinat Sistemi	123
A.2.4 Öklidyen Toroidal Koordinat Sistemi	127
A.2.5 Öklidyen Çiftküresel Koordinat Sistemi	133
A.2.6 Öklidyen Tanjant Küre Koordinat Sistemi	138
REFERANSLAR	143
İNDEKS	145